PROYECTO DE MEJORAMIENTO ACADÉMICO

CAMPUS FRATERNIDAD

GUIA No. 5: FACTORIZACIÓN

MATEMÁTICAS BÁSICAS 2009-I

ESTIMADO ESTUDIANTE: El Proyecto de Mejoramiento Académico busca que usted comparta un espacio con compañeros y profesores en donde se vivencien experiencias y métodos de estudio efectivos que orienten la utilización de su trabajo independiente para que éste se convierta en una disciplina y una actitud interior. En ese sentido, estas guías se constituyen en un APOYO a dicho trabajo.

Competencia

- **Utilizar** adecuadamente las expresiones algebraicas, sus propiedades básicas y operaciones para resolver situaciones problema en distintos contextos.

- **Indicadores de logro: Factoriza** expresiones con base en los casos desarrollados.

Se agradece a los docentes Jorge Agudelo, Elizabeth Bedoya y Francisco Córdoba por sus aportes a esta guía.

JUSTIFICACIÓN

En muchas situaciones se presentan problemas que conducen al planteamiento de ecuaciones, como movimiento parabólico en física, problemas de utilidad en economía, diseño y construcción de estructuras ingenieriles, entre otros, para las cuales es necesario encontrar raíces o soluciones y una manera de encontrar esas raíces es aplicar procesos de factorización a los polinomios asociados a estas ecuaciones.

Igualmente la factorización permite realizar simplificaciones y reducción a mínimas expresiones, lo que hace menos engorrosas las derivadas y las integrales en cálculo.

En esta guía se pretende que el estudiante complemente el aprendizaje desarrollado en el aula de clase en la algebraica.

COMPLEMENTO A LAS NOTAS DE CLASE

1. Factor común monomio

Resulta cuando el factor común de todos los términos del polinomio es un monomio.
Ejemplo:

Factorizar: $4ax^3 - 2x^2 = 2x^2(2ax - 1)$

Vemos como tanto 2 como x^2 están multiplicando en ambos términos, por lo tanto $2x^2$ sale como factor común:

$4ax^3 - 2x^2 = 2x^2(2ax - 1)$

Recordar y repasar: El término $\mathbf{2x^2}$ es el Máximo Común Divisor (MCD) de los dos términos

2. Factor común polinomio

Resulta cuando el factor común que aparece es un polinomio. Normalmente hay que hacer la agrupación debida para obtenerlo.

Ejemplo: Factorizar a(x + 3) + b(x + 3)

Vemos como (x + 3) está multiplicando en ambos términos [tanto a **a** como a **b**], por lo tanto (x + 3) sale como factor común:

a(x + 3) + b(x + 3) = (x + 3)(a + b)

Ejemplo:

Factorizar: **ax + bx + aw + bw**

Agrupamos (ax + bx) + (aw + bw)

Sacamos factor común en cada binomio: x(a + b) + w(a + b)

No quedó factor común polinomio: (a + b)

$$\text{Luego se divide } \frac{x(a+b)+w(a+b)}{(a+b)} = x + w$$

Por lo tanto: ax + bx + aw + bw = (a + b)(x + w)

Ejemplo:

Factorizar: **$2a^2 + 4a - 8b - 4ab$**

Por observación agrupamos: $(2a^2 - 4ab) + (4a - 8b)$

En cada binomio hay factor común: $2a(a - 2b) + 4(a - 2b)$

Result un factor común polinomio: (a – 2b)

$$\text{Luego se divide } \frac{2a(a-2b)+4(a-2b)}{(a-2b)} = 2a + 4$$

Por lo tanto: $2a^2 - 4ab + 4a - 8a = (a - 2b)(2a + 4)$

ACTIVIDAD: FACTORIZAR

PREGUNTAS	RESPUESTAS
$xy^2 - y^2w$	$= y^2(x - w)$
$5xy^2 - 15y$	$= 5xy(y - 3)$
$24a^3b^2 - 12a^3b^3$	$= 12a^3b^2(2 - b)$
$4xy - 8xy^2 - 12xy^3$	$= 4xy(1 + 2y - 3y^2)$
$16a^4b^5 - 20a^3b^2 - 24a^2b^6$	$= 4a^2b^4 (4a^2b - 5a + 6b^2)$
$x^{a+2} - 3x^{a+3} - 5x^a$	$= x^a (x^2 + 3x^3 + 5)$
$2x(a - 1) - 3y(a - 1)$	$= (a - 1)(2x - 3y)$
$x(a + 9) - a - 9$	$= (a + 9)(x - 1)$
$- x - y + a(x + y)$	$= (x + y)(a - 1)$
$(a + b - 2)(a^2 + 2) - a^2 - 2$	$= (a^2 + 2)(a + b - 3)$
$a^2x^2 - 8bx^2 + a^2y^2 - 8by^2$	$= (x^2 + y^2)(a^2 - 8b)$
$6ax - 2by - 2bx - 12a + 6ay + 4b$	$= (6a - 2b)(x + y - 2)$
$a^2b^3 - m^5 + a^2b^3x^2 - m^5x^2 - 3a^2b^3x + 3m^5x$	$= (a^2b^3 - m^5)(1- 3x + x^2)$
$(x + 3)(x + 2)(x + 5) + (x + 2)(x + 5) + (x + 5)$	$= (x + 5)(x + 3)^2$

3. Factorizar un Binomio de la forma: $x^n \pm y^n$.

3.1 Factorizar la diferencia de dos cuadrados. Por multiplicación se obtiene:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Recíprocamente, se puede escribir:
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Por lo tanto la diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma de sus raíces cuadradas por su diferencia.

Ejemplos: Factorizar las expresiones siguientes:

$9x^2 – 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2 = (3x + 4y)(3x – 4y)$

$(7a + 3)^2 - (5a - 4)^2 = (7a + 3 + 5a - 4)(7a + 3 – 5a + 4) = (12a - 1)(2a + 7)$.

Hay casos especiales, como polinomios que pueden tomar la forma de diferencia de cuadrados ya sea agrupando debidamente sus términos o agregándoles y restándoles un mismo término:

$9x^4 + 11x^2 + 4$

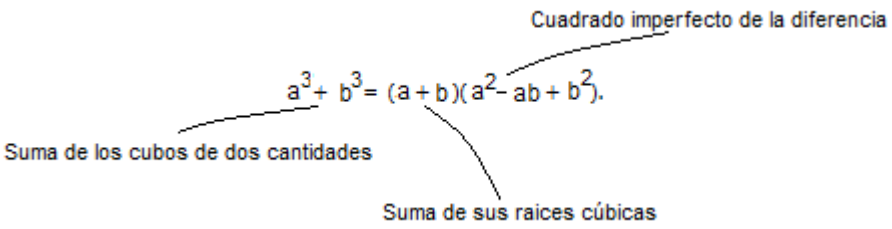
$9x^4 + 11x^2 + x^2 + 4 - x^2 = 9x^4 + 12x^2 + 4 - x^2 = (3x^2 + 2)^2 - (x)^2 = (3x^2 + 2 + x)(3x^2 + 2 - x)$

En este ejemplo, se ha adicionado x^2 con el fin de convertir el trinomio en cuadrado perfecto, y se ha restado el mismo término para que la expresión varíe.

3.2 Factorizar de la suma de dos cubos. Del producto notable:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$,

se deduce bilateralmente: **$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.**



La suma de los cubos de dos términos es igual a la suma de las raíces cúbicas de esos términos por el cuadrado imperfecto de la diferencia.

Ejemplo. Factorizar:
$27x^3 + 8y^3 = (3x)^3 + (2y)^3 = (3x + 2y)(9x^2 - 3x\cdot 2y + 4y^2) = (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$.

3.3 Factorizar de la diferencia de dos cubos. Similar que para la suma de dos cubos, del producto notable:

$$\mathbf{(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3}$$

se obtiene inversamente: $\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$.

La diferencia de los cubos de dos términos es igual a la diferencia de las raíces cúbicas de esos términos por el cuadrado imperfecto de la suma.

Ejemplo. Factorizar:
$125a^3 - b^3c^3 = (5a)^2 - (bc)^2 = (5a - bc)(25a^2 + 5a\cdot bc + b^2c^2) = (5a - bc)(25a^2 + 5abc + b^2c^2)$.

3.4 Factorizar un binomio de la forma: $x^n \pm y^n$. Sea factorizar el binomio $x^5 + y^5$. Sus divisores, de la forma $x^n \pm y^n$ solo pueden ser $x^n + y^n$, y $x^n - y^n$. Al ensayarlos sucesivamente, aplicando la propiedad del residuo de la división, (El residuo de la división de un polinomio entero en x, entre un binomio de la forma $x \pm a$, se obtiene sustituyendo, en el dividendo, x por el simétrico de a.) se obtiene:

$P(-y) = -y^5 + y^5 = 0$.
$P(y) = y^5 + y^5 = 2y^5$.

Por lo tanto $x^5 + y^5$ es divisible entre $x + y$ pero no entre $x - y$.

Al efectuar la división, se halla el otro factor del binomio propuesto, o sea:
$(x^5 + y^5) \div (x + y) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$.

luego:
$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$.

Para factorizar un binomio de la forma $x^n \pm y^n$ hay que examinar qué binomio de la forma $x^n \pm y^n$ lo divide exactamente, y multiplicar este divisor por el cociente de la división.

Cuando el binomio es $x^n - y^n$ y n es par, es preferible considerar dicho binomio como una diferencia de cuadrados.

Ejemplo. Factorizar:

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^3 - x + 1)$.
$x^7 - y^7 = (x - y)(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6)$.
$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$.

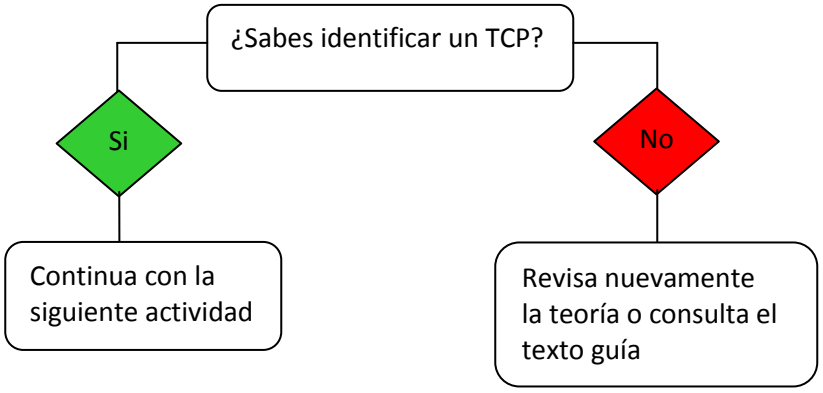
4. Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)

Un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio en el que dos de sus términos son positivos y son cuadrados perfectos y el tercero corresponde al doble producto de las raíces cuadradas de los términos positivos.

¡**Recuerda**! Una cantidad es un **cuadrado perfecto** si corresponde al cuadrado de otra cantidad.

Actividad 1 Cuáles de los siguientes trinomios corresponden a un TCP. Para aquellos que no lo sean explique las razones por las cuáles no lo son.

1. $x^2 - 4x + 4$.
2. $x^2 - 5x - 6$.
3. $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$.
4. $4x^2 - 6x + 9$.
5. $9x^4 + 6\sqrt{2}x + 2$.

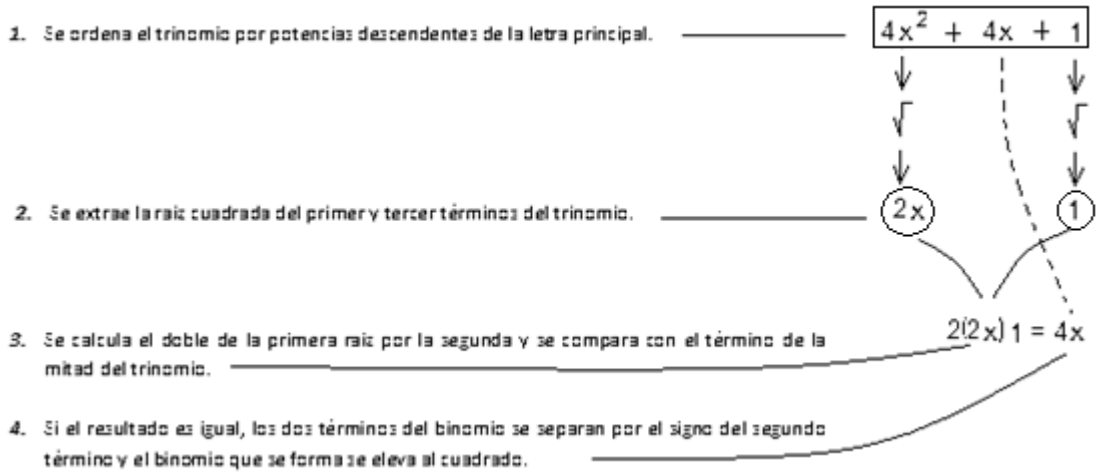


¡El esquema anterior te sugiere que cada que repases la identificación de cualquiera de los trinomios o la regla para factorizarlo, te detengas y analices si debes retomar nuevamente la teoría o puedes continuar avanzando!

Regla para factorar un TCP:

1. Se ordena el trinomio por potencias descendentes de la letra principal.
2. Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer términos del trinomio.
3. Se calcula el doble de la primera raíz por la segunda y se compara con el término de la mitad del trinomio.
4. Si el resultado es igual, los dos términos del binomio se separan por el signo del segundo término y el binomio que se forma se eleva al cuadrado.

Ilustración: Factorizar o descomponer en factores $4x^2 + 4x + 1$



Ej. : $c^2 - 10c + 25$

Solución Veamos que esta expresión es un TCP: se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer términos

$$\sqrt{c^2} = c$$
$$\sqrt{25} = 5$$

Ahora se multiplican estas dos raíces por dos: $2 \times c \times 5 = 10c$, dado que este resultado coincide con el segundo término, es posible afirmar que el trinomio es cuadrado perfecto, por lo tanto podemos factorizarlo tal y como lo propone la regla, así:

$c^2 - 10c + 25 = (c-5)^2$ ♦

Ej.: $\frac{x^2}{4} - 4x + 16$

Solución Usando el procedimiento descrito anteriormente, se obtiene

$$\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}$$
$$\sqrt{16} = 4$$

$$2 \times \frac{x}{2} \times 4 = 4x$$

$$\frac{x^2}{4}-4x+16=\left(\frac{x}{2}-4\right)^2$$ ♦

Ej. : $-1+2a^5-a^{10}$

Solución

Primero debemos organizar la expresión para que los cuadrados perfectos sean positivos, tal y como se expresa en la identificación

$$-1+2a^5-a^{10}=-\left(1-2a^5+a^{10}\right)$$

Ahora, factoricemos el TCP del paréntesis

$$\sqrt{1}=1$$
$$\sqrt{a^{10}}=a^5$$

$$2\times 1\times a^5=2a$$

$$-1+2a^5-a^{10}=-\left(1-2a^5+a^{10}\right)=-\left(1-a^5\right)^2$$ ♦

<u>Actividad 2</u> Descomponer en factores

1. $49b^6-70ab^3+25a^2b^4$
2. a^8+18a^4+81
3. $12m^2+36+m^4$
4. $-9+6y-y^2$
5. $\frac{9}{16}x^2+\frac{3}{4}xy+\frac{y^2}{4}$

5. Trinomio Cuadrado Perfecto por Adición y Sustracción

Un trinomio ordenado con relación a una letra, corresponde a un **TCP por adición y sustracción**, si al sumarle un cuadrado perfecto al segundo término del trinomio, éste se convierte en un TCP, por lo cual nos sugiere que inicialmente se debe de verificar si el trinomio dado es cuadrado perfecto.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo:

Ejercicio Identificar si $x^4+x^2y^2+y^4$ corresponde a un TCP por adición y sustracción

Solución Verifiquemos primero si el trinomio es cuadrado perfecto

$$\sqrt{x^4}=x^2 \qquad \sqrt{y^4}=y^2$$

luego $2(x^2)(y^2) = 2x^2y^2$

Dado que el segundo término del trinomio no coincide con el resultado obtenido en el paso anterior, podemos afirmar que el trinomio no es cuadrado perfecto, pero ¿será posible adicionarle una cantidad al segundo término del trinomio para que este se convierta en un TCP y que esta cantidad corresponda a un cuadrado perfecto?, sí es posible y dicha cantidad es x^2y^2 , por lo tanto podemos concluir que el trinomio dado es un TCP por adición y sustracción.

Regla para factorar un TCP por adición y sustracción Ilustremos esta regla factorizandio el trinomio dado en el ejercicio anterior

Ejemplo 1 Factorar $x^4 + x^2y^2 + y^4$

Solución $x^4 + x^2y^2 + y^4$

$+x^2y^2 \quad -x^2y^2$ (paso1)

$(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$ (paso2)

$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$ (paso3)

$= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ (paso4) ♦

Justificación del procedimiento anterior

Paso1. Sumamos x^2y^2 al segundo término para que el trinomio se convierta en TCP y restamos la misma cantidad para que éste no varíe.

Paso2. Efectuamos suma.

Paso 3. Factorizamos el TCP.

Paso 4. Factorizamos la diferencia de cuadrados y ordenamos

Ejemplo 2 Descomponer $a^4 - 16a^2b^2 + 36b^4$

Solución Veamos si el trinomio dado es cuadrado perfecto

$\sqrt{a^4} = a^2 \qquad \sqrt{36b^4} = 6b^2$

luego $2(a^2)(b^2) = 12a^2b^2$

El trinomio dado no es un TCP, pero si le adicionamos $4a^2b^2$ al segundo término se nos convertiría en un TCP, además esta cantidad es un cuadrado perfecto, por lo tanto el trinomio dado es un TCP por adición y sustracción, ahora procedamos a factorizarlo de la misma forma que se efectuó con en el ejemplo anterior

$a^4 - 16a^2b^2 + 36b^4$

$$+4a^2b^2 \qquad -4a^2b^2$$

$$(a^4 - 12a^2b^2 + 36b^4) - 4a^2b^2$$

$$= (a^2 - 6b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$=(a^2 - 6b^2 + 2ab)(a^2 - 6b^2 - 2ab)$$

$$=(a^2 + 2ab - 6b^2)(a^2 - 2ab - 6b^2)$$ ♦

Actividad 3 Factorar los siguientes trinomios

1. $x^8 + 3x^4 + 4$
2. $a^4 - 3a^2b^2 + b^4$
3. $x^8 - 4x^4y^4 + 16y^8$
4. $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$
5. $4x^4 - 29x^2 + 25$

6. Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Algunos trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ pueden ser:

1. $x^2 + 5x + 6$
2. $x^4 - 5x^2 - 50$
3. $x^6 + 7x^3 - 44$
4. $a^2b^2 - ab - 42$
5. $(5x)^2 - 9(5x) + 8$

Cumplen las siguientes condiciones:

- El primer término es un cuadrado perfecto en el que aparece la variable.
- El segundo término tiene como coeficiente un número real cualesquiera, multiplicado por la raíz cuadrada del primer término
- El tercer término es un término independiente

Actividad 4 Identifique los trinomios que correspondan a trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y para aquellos que no lo sean explique.

1. $x^2 - 9x + 18$
2. $x^2 + x^4 - 12$
3. $x^4 + x - 12$
4. $3x^2 + 2x + 8$
5. $x^6 - 19x^3 - 42$

Regla para factorar un trinomio de la forma : $x^2 + bx + c$

- Organice la expresión de con relación a una letra.
- El trinomio se descompone en dos factores binomios. El signo que separa las cantidades del primer factor corresponde al signo del coeficiente del segundo término y el signo que separa las cantidades del segundo factor corresponde al producto de los signos de los coeficientes del segundo y del tercer término en el trinomio.
- La primera cantidad de cada factor corresponde a la raíz cuadrada del primer término y las segundas cantidades son dos números reales tales que su producto sea igual al tercer término y su suma, si los signos que separan las cantidades en cada factor son iguales, o su resta, si los signos que separan las cantidades en cada factor son diferentes, sea igual al coeficiente del segundo término.

Actividad 5 Factorice cada uno de los trinomios identificados en la actividad anterior.

7. Trinomios de la forma: $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$

Observa que la única diferencia con respecto al trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2+bx+c}$,es que el primer término es un cuadrado perfecto en el que aparece la variable, multiplicado por un real cualesquiera diferente de uno.

Ilustremos una forma general de factorizar este tipo de trinomio resolviendo el siguiente ejercicio:

Ejercicio Descomponer en factores $6x^2-11x+10$

Solución

$$6x^2+11x-10=\frac{6[6x^2+11x-10]}{6}$$

Multiplicamos y dividimos todo el trinomio por el coeficiente de x^2

$$=\frac{6^2x^2+11(6x)-60}{6}$$

$$=\frac{(6x)^2+11(6x)-60}{6}$$

Observa que el trinomio tomó la forma $\boldsymbol{x^2+bx+c,}$ por lo tanto procedemos a factorizarlo de acuerdo con la regla dada anteriormente para este tipo de trinomios

$$=\frac{(6x+15)(6x-4)}{6}$$

$$=\frac{3(2x+5)2(3x-2)}{6}$$

$$=\frac{6(2x+5)(3x-2)}{6}$$

Finalmente lo que se pretende es eliminar nuevamente el denominador con el producto de los factores comunes del numerador

$= (2x +)(3x - 2)$ ♦

Existe otro método para factorizar este tipo de trinomios conocido como el método del tanteo.

Actividad 6 Consulta en qué consiste el método del tanteo, propone cinco ejemplos resueltos.

Actividad 7 Factorice los siguientes trinomios

1. $x^2 + 4x + 2$

2. $4x^2 + 4x + 2$

3. $3x^2 - 7x + 2$

4. $9(x - y)^2 + 12(x - y)(x + y) + 4(x + y)^2$

5. $16x^6 - 2x^3y^2 + \frac{y^4}{16}$

6. $1 + \frac{2b}{3} + \frac{b^2}{9}$

7. $m^4 + m^2n^2 + n^4$

8. $x^8 + 3x^4 + 4$

9. $x^6 - 7x^3 + 6$

10. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

11. $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$

12. $\frac{25y^4}{36} + \frac{1}{25} - \frac{y^2}{3}$

CIBERGRAFÍA

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/MATEGENERAL/t1-reales-expresionesalgebraicas/T1-2-expresiones-algebraicas-julioetall/node21.html

http://www.tareaescolar.net/materias/math/baldor/96.htm

http://www.fisicanet.com